

INTEGRAL FOURIER DAN PENERAPANNYA

Dwi Agus Susanti

013114033

ABSTRAK

Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mengetahui bagaimana mendapatkan integral Fourier dari deret Fourier, mengkaji syarat cukup keberlakuan integral Fourier, dan mengkaji penerapan integral Fourier di bidang fisika dan matematika.

Deret Fourier merepresentasikan suatu fungsi periodik $f(x)$ tertentu dengan suatu deret trigonometrik. Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi periodik dengan periode $2L$. Agar dapat mencakup fungsi nonperiodik, deret Fourier tersebut diperluas yaitu dengan membuat periodenya mendekati tak hingga, $L \rightarrow \infty$, maka representasi $f(x)$ akan berubah menjadi integral Fourier, yaitu

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos \omega(v - x) dv d\omega \quad (-\infty < x < \infty)$$

Teorema Integral Fourier memberikan syarat cukup agar integral Fourier konvergen dan pada setiap x mempunyai nilai $f(x)$, kecuali pada x yang membuat $f(x)$ tidak kontinu, pada x yang demikian ini nilai integral sama dengan rata – rata limit kiri dan limit kanan fungsi $f(x)$ pada titik tersebut. Integral Fourier digunakan untuk memecahkan masalah nilai batas dalam bidang fisika, yaitu pada masalah suhu pada batang yang panjangnya semi tak hingga $x \geq 0$ yang mempunyai solusi

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} f(v) \left[e^{-(v-x)^2 / 4kt} - e^{-(v+x)^2 / 4kt} \right] dv \quad t > 0$$

dan pada masalah suhu pada batang yang panjangnya tak hingga yang mempunyai solusi

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} f(v) e^{-(v-x)^2 / 4kt} dv \quad t > 0$$

Selain itu, pengintegralan fungsi $f(x) = e^{-kx}$, ($x > 0, k > 0$) dengan menggunakan integral kosinus Fourier dan integral sinus Fourier menghasilkan persamaan – persamaan yang disebut integral Laplace yaitu

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad \text{dan} \quad \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad \text{dengan} \quad (x > 0, k > 0).$$